Математика.

Математика, самая абстрактная из наук, проделала долгий исторический путь. Уже в древности было видно разделение на чистую, полностью оторванную от жизни и прикладную, которая имела место с насущными проблемами, стоящими перед человеком. Еще древние Египтяне знали те только как сосчитать товар в лавке пересчитать хлеба в хранилище, но и как правильно поделить участки земли после окончания разлива Нила и даже вычислить солнечное затмение, что, впрочем, скорее чистая математика, чем прмкладная. Это разделение математики на прикладную и чистую сохранилось и до сих пор. Возможно, Пифагор или Аристотель и были способны объять всю эту дисциплину целиком, но сегодня математика получила столь сильное развитие, что общее количество ее подразделов невозможно себе даже представить. Кто-то из великих математиков однажды заметил (за авторство и точность цитаты я не ручаюсь), что обычный выпускник технического вуза знает математику в целом такой, какой она была во времена Ньютона (имеется в виду интегральное и дифференциальное исчисление), рядовой специалист в области математики - такой, какой была вся математика в середине 19-го века, академик - такой, какой она была 50 лет назад; может быть, 1000 человек в мире - такой, какой она была 20 лет назад, несколько человек (самые выдающиеся) - такой, какой она была (взятая в целом) 10 лет назад и никто не знает всю эту науку на современном уровне. Конечно, при этом конкретную проблему математики очень хрошо знает именно тот специлист, который над ней в данную минуту работает.

Громадные достижения современной математики связаны с такими именами, как Ньютон и Лейбниц. Именно созданное ими интегральное и дифференциальное исчисление и лежит в основе всех современных естественнонаучных расчетов. Фактически и химия, и физика и биология сегодня никак не могут обойтись без исчисления бесконечно малых.

В качестве примера рассмотрим математический анализ. Математический анализ. Математический анализ сегодня - строго аксиоматическая наука, основанная на заранее выдвинутых аксиомах (например, Лев Дмитриевич Кудрявцев, чл.-коррнспондент РАН [1], построил свой курс на аксиомах Пеано, из которых он вывел все теоремы математического анализа, включая и многомерный случай). Вообще фундаментальная математика - наука абсолютно точная и всякое утверждение, интуитивно очевидное, должно быть строго доказано.

<u>Пример</u>

Непрерывность действительных чисел.

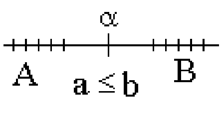
Рассмотрим числовую прямую со всеми действительными числами (целыми, рациональными и иррациональными). Интуитивно совершенно ясно, что числовой ряд непрерывен. Например, я беру числа 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. и рассматриваю любую пару: 2 и 3. Есть ли числа между ними? Конечно, 3.5, например. А между 3 и 3,5 ? Естественно, 3.25, 3.3, 3.4 или еще сколько угодно чисел, в том числе и $(5)^{1/2}$ - иррациональное. Вроде бы совершенно очевидно, что числовой ряд непрерывен. Вот как формулируется это свойство в качестве пятой аксиомы действительных чисел:

<u>Аксиома</u>. (Свойство непрерывности).

Каковы бы ни были непустые множества $A \subset R$ и $B \subset R$, у которых для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$, существует такое число α, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение

$$a \le \alpha \le b$$

Здесь R - числовая прямая; $A \subset R$ означает: A является подмножеством R



Иными словами, сколь бы близко не сходились множества A и B на числовой прямой, всегда есть число, которое ляжет между ними.

Сейчас я продемонстрирую ответ на интересный вопрос - а как рассмотреть предельный случай подобного рода деления числовой прямой: взять наоборот, не множества A и B, а число α и отнести исе числа $a < \alpha$ к одному множеству (A), а все числа $b > \alpha$ к другому множеству (B) и какие этих множеств A и B и числа α можно получить с помощью строгих математических методов рассуждения.

<u>Теорема.</u>

Пусть задана числовая прямая R и выбрано число α (произвольно), а также множества $A \stackrel{def}{=} \{x: x < \alpha\}$, $B \stackrel{def}{=} \{y: y > \alpha\}$, $A \subset R$, $B \subset R$, и $A \cup B = R$. Тогда число α, обладающее данными свойствами, единственно, т.е. нельзя взять другое число β, про которое можно было бы сказать: каждое число того

же самого множества A меньше числа β, а каждое число того же самого множества B больше числа β.
Доказательство.

Будем рассуждать от противного. Пусть такое число β существует и $\alpha<\beta$, либо $\beta<\alpha$. Пусть вначале $\alpha<\beta$. Прибавим к обеим частям этого равенства α: $\alpha+\alpha<\alpha+\beta \Rightarrow \alpha<(\alpha+\beta)/2$. Аналогично $\alpha+\beta<\beta+\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)/2<\beta$, т.е. $\alpha<(\alpha+\beta)/2<\beta$. Рассмотрим полученное число $(\alpha+\beta)/2$ очень внимательно. Поскольку число α
выбрано так, что любое число $y>\alpha$ множеству B, то число $(\alpha+\beta)/2$ принадлежит множеству B. Аналогично, поскольку число β также обладает (по предположению) тем свойством, что если $x<\beta$, то $x\in A$, то число $(\alpha+\beta)/2$ принадлежит сразу и множеству A и множеству B. Далее, воспользовавшись свойством транзитивности операции $<$, можно показать, что, если любой элемент $x\in A$ и любой элемент $y\in B$ то из соотношения $x<\alpha<y$ следует, что $x<y$. Получаем: вместо x берем $(\alpha+\beta)/2\in A$ и вместо y берем $(\alpha+\beta)/2\in B$ и тогда $(\alpha+\beta)/2<(\alpha+\beta)/2$ - противоречие. Значит, искомое предположение неверно и число α – единственное (либо α и β равны).

Это - один из методов математического доказательства, называемый доказательством от противного - если есть противоречие, то исходное положение неверно и верно его отрицание (в соответствии с законами математической логики). На самом деле возможна, конечно и ошибка в рассуждениях, при которой можно доказать все что угодно, но здесь надо помнить, что математика вначале вводит аксиоматически каждое из положений и доказывает применимость каждой из операций, например <, >, операции сложить и т.д., которые должны быть доказаны до того, как сформулирована теорема, что и делают в курсе математического анализа, пользуясь, кстати, и доказательством "от противного".

Насколько важно каждое положение, можно увидеть, если отбросить одно из них, например, давайте отбросим положение: объединение $A\cup B=R$. Тогда уже неверно, что для любого $y>\alpha$ должно быть $y\in B$, и, следовательно, $(\alpha+\beta)/2$ не обязательно принадлежит множеству B и соответственно необязательно $(\alpha+\beta)/2$ принадлежит множеству A. Следовательно $(\alpha+\beta)/2$ - просто число и про него ничего нельзя сказать - никакого противоречия не возникает. Вседоказательство рассыпалось в прах и только если вернуть отброшенное положение, противоречие восстанавливается - теорема доказуема.

На самом деле и положение о том, что $(\alpha+\beta)/2 <(\alpha+\beta)/2$ - противоречие, я тоже обязан доказать, т.е. строго свести к противоречию именно аксиомам математики, а не интуитивному суждению что этого не может быть.

Теорема 2.

Докажем, что $\alpha<\alpha$ - противоречие.

Вычтем из обеих частей α, получим $0<0$. Надо доказать, что это - противоречие. Для этого воспользуемся тремя аксиомами [1]. Вначале покажем, что число ноль единственно. Действительно, допустим, что есть два нуля - 0 и 0'. Тогда, в силу аксиомы о том, что прибавление нуля числа не меняет получаем: 0+0'=0 и 0'+0=0'. В силу аксиомы a+b=b+a имеем: левые части 0+0' равны, следовательно, равны и правые части, т.е. 0=0' - число ноль равно самому себе, единственно. Теперь воспользуемся аксиомой упорядоченности - для каждого числа a определено ровно одно из соотношений: a>0, a<0 или a=0. Это - аксиома, принимается без доказательства, т.е. в нашем случае есть число ноль, которое больше нуля и число ноль, которое меньше нуля, но, как было только что доказано, число ноль единственно, т.е. в неравенстве 0<0 и справа, и слева тот же самый ноль, который одновременно (вот оно, противоречие аксиоме!) и больше нуля, и меньше нуля. Вот теперь противоречие именно исходному положению, аксиоме, что и доказывает теорему.

Таким образом, даже интуитивное положение о том, что a<a - ерунда, математика обязана свести к еще более простым положениям, а в конечном счете доказать, что оно противоречит именно аксиоме. Аксиома гласит - ровно одно свойство - ноль больше нуля, или ноль меньше нуля, или ноль равен нулю. Но мы доказали, что ноль единственен и именно противоречие тому положению, что ноль не может быть меньше нуля и одновременно больше нуля и доказывает исходное положение. Заметьте - само по себе утверждение 0<0 аксиомам не противоречит, хотя с точки зрения здравого смысла и является полной ерундой.

Очень многие открытия были сделаны имеено когда ученые-математики пытались доказать очевидное противоречие здравому смыслу. Как тут не вспомнить математику Лобачевского - ведь интуитивно совершенно ясно, что параллельные прямые не пересекаются, но попытка доказать это (а не просто ввести в качестве аксиомы) привело к построению неэвклидовой геометрии.

Среди других методов, наиболее часто используемых в чистой математики, надо отметить метод математической индукции. Если теорема доказана для некоего шага, используемого в самой теореме и меняющегося от 1 до ∞, равного 1 и исходя из предположения, что теорема верна для к-го шага, удается доказать, что она верна для шага к+1, то теорема считается доказанной. Это утверждение следует из аксим Пеано натуральных чисел. Аксиомы Пеано имеют вид [1]:

1^o Каждому элементу $n\in N$ поставлен в соответствие точно один элемент этого множества, обозначаемый через $n+1$ и называемый элементом, следующим за элементом n.

2^o Каждый элемент из N может следовать только за одним элементом $n\in N$

3^o Существует единственный элемент, обозначаемый символом 1, который не следует ни за каким элементом.

4^o Если множество $M\subset N$ таково, что $1\in \subset$, и из включения $m\in M$ следует, что $m+1\in M$, то $M=N$

Метод математической имеет вид [1]:

Если имеется множество утверждений, каждому из которых приписано натуральное число (его номер) $n=1,2,...$ и если доказано, что:

1)справедливо утверждение с номером 1

2)из справедливости утверждения с любым номером $n\in N$ следует справедливость утверждения с номером $n+1$

то тем самым доказана справедливость всех рассматриваемых утверждений, т.е. справедливость утверждения с произвольным номером $n\in N$.

Это доказательство следует из отождествления множества М всех справедливых утверждений множеству N натуральных чисел (это - аксиома 4^o). Значит, если проведено доказательство методом математической индукции и рассматривается произвольное утверждение с номером n, то в силу того, что как следствие проведенного доказательства этому натуральному числу $n\in N$ сопоставлено единственное число $m\in M$ (в силу тождества M=N). Но число $m\in M$ это истинное утверждение (поскольку М теперь - это множество истинных утверждений). Значит, утверждение с номером m=n - истинно. Поскольку n выбрано произвольно, то теперь это утверждение будет верно для любого n, т.е. для всех n.

Еще одним методом рассуждения, часто использующимся в математике, при доказательствах, является геометрическое построение на множестве чисел такое, что каждый шаг его можно свести к более простым и ранее доказанным утверждениям. Продемонстрируем это примером одномерного (как самого простого построения). Далее по [1]:

Определение 1.

Точка а (конечная или бесконечно удаленная) числовой последовательности называется пределом последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ члены содержатся в окрестности $U(a,\varepsilon)$: $x_n\in U(a,\varepsilon)$. Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} =a$.

Определение 2.

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она сходящейся.

Определение 3.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n>n_\varepsilon$ $m>n_\varepsilon$ справедливо неравенство:

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

С помощью логических символов условие Коши записывается следующим образом:

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in N\ \forall n\in N\ \forall m\in N\ n>n_\varepsilon,\ m>n_\varepsilon : |x_n-x_m|<\varepsilon$

Теорема (критерий Коши)

Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она уовлетворяла условию Коши.

Доказательство необходимости.

Пусть последовательность $\{x_n\}$сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Зададим $\varepsilon>0$, тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство: $|x_n-x_m| <\varepsilon/2$. Пусть теперь $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$; тогда

$|x_n-x_m| = |(x_n-a)+ (a-x_m)|\le| |x_n-a| +|x_m-a| | <\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

(вот оно, геометрическое построение, разбивающее отрезок, который надо исследовать, $|x_n-x_m|$ на два) т.е. выполняется условие Коши.

Доказательство достаточности.

Пусть последовательность удовлетворяет условию Коши, т.е. для всякого $\varepsilon>0$ существует такое , что если $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$, то $|x_n-x_m|<\varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon=1$; тогда существует такое n_1, что при $n>n_1$ и $m>n_1$ выполняется неравенство $|x_n-x_m|<1$. В частности, если $n>n_1$ и $m=n_1+1$ то $|x_n-x_{n_1+1}|<1$, т.е. $x_{n_1+1}-1<x_n<x_{n_1+1}+1$ при $n>n_1$. Это значит, что последовательность x_n, $n=n_1+1$, n_1+2, ... ограничена. Поэтому, в силу теоремы 4 [1], существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число а. Зададим некоторое $\varepsilon>0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности существует такое k_ε, что для всех номеров $k>k_\varepsilon$ или, что то же самое, согласно определению подпоследовательности, для всех $n_k>n_{k_\varepsilon}$ выполняется неравенство:

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon/2$$

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$удовлетворяет условию Коши, то существует такое n_ε , что для всех $n>n_\varepsilon$ и всех $m>n_\varepsilon$ выполняются неравенства:

$$|x_n-x_m|<\varepsilon/2$$

Положим $N_\varepsilon=\max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ и зафиксируем некоторое $n_k>N_\varepsilon$. Тогда для всех $n>N_\varepsilon$ получим

$|x_n-a|=|(x_n-x_{n_k})+(x_{n_k}-a)|\le |x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Снова автор [1] использовал геометрическое (в данном случае одномерное) построение, доказавшее теорему, потому что каждая из половинок доказывается,
опираясь на предыдущие теоремы и на определения.