Для прикладной математики наиболее важным приближением является введение так называемой сетки, на которой будет решаться уравнение или система. Имеется в виду следующее - вместо всей числовой оси вводится последовательность чисел ε, 2ε, 3ε, 4ε, 5ε и т.д., где ε – малое число. Именно с такой точностью и будет получаться окончательная функция (скажем при численном дифференцировании), в том смысле, что можно знать ее значения в точке ε, 2ε, 3ε, а скажем, значение в точке 1,5ε уже нужно вычислять, например, как полусумму двух значений, или по более сложным правилам аппроксимации. Наиболее обычной проблемой численной математики является компромисс между размером сетки (скажем 1000×1000 для матрицы) и сложностью алгоритма численного преобразования. Чем сложнее алгоритм, например, численного дифференцирования, чем большее число точек он затрагивает, тем для той же самой точности надо меньше точек для матрицы, скажем уже не 1000×1000, а 100×100 или даже меньше. С увеличением производительности компьютеров имеется тенденция к использованию все более простых алгоритмов и все большего числа точек в сетке, т.к. компьютер успевает и большее число точек обработать за то же время.

Я хочу привести несколько примеров, иллюстрирующих вышеприведенное суждение. Рассмотрим, напрмер, такую проблему, как интерполяция функции на сетке. Возьмем, для примера функцию y=ln(x) и рассмотрим ее интерполяцию с точность до ~0,1, если первая точка интерполяции равна 1.

а)Линейная интерполяция [1a]:

$$y=y_o+(x-x_o)\cdot(y_1-y_o)/h$$

где y_o- значение функции y=ln(x) в точке x_o, y_1 - значение в точке x_1 , h - шаг сетки. В качестве точки x_o берем 1, в качестве точки x_1 - 1,5, т.е. шаг h=0,5 ($h=x_1-x_o$). Получив с помощью микрокалькулятора значения ln(1,5)=0,405465108, вычисляем значение аппроксиманты в точке 1,25:

$$y(1,25)=0+0,25\cdot(0,405465108)/0,5=0,2027325554$$

В действительности ln(1,25)=0,223143551, т.е. точность интерполяции равна: Δf=0,020410997.

б)Квадратичная интерполяция [1a]:

$$y(x_o+p\cdot h)=[p\cdot(p-1)/2]\cdot y_{-1} + (1-p^2)y_o + [p\cdot(p+1)/2]\cdot y_{+1}$$

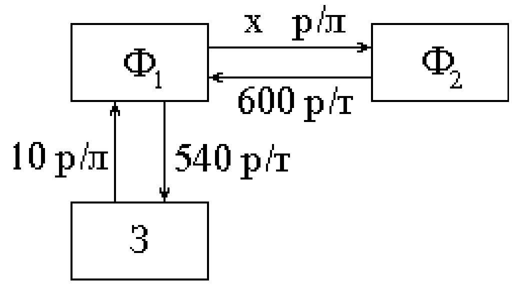
$p=(x-x_o)/h$

где h - шаг сетки (снова берем h=0.5). Но теперь рассматриваются не 1-й, 2-й, 3-й и т.д. узлы сетки, а -1-й, 0-й, 1-й узлы сетки. Берем $x_{-1}=1$, $x_o=1,5$, $x_1=2$, тогда $y_{-1}=\ln(1)=0$, $y_o=\ln(1,5)=0,405465108$, $y_{+1}=\ln(2)=0,69314718$. Снова вычисляем значение в точке x=1,25, тогда:

$y(1,25)=(-0,5)(-1,5)\cdot0/2+(1-(0,5)^2)\cdot0,405465108+ [(-0,5)\cdot(0,5)/2]\cdot0,69314718= 0,75\cdot0,405465108-0,125\cdot0,69314718=0,304098831-0,086643397=0,217455433$

Теперь Δf=0,0056881175, т.е. точность иртерполяции возросла в 3,6 раза. Учитывая произвольность точки, эту величину лучше записать как 3-4 раза (все дело в том, что я не вычислял максимального значения отклонения интерполянты от исходной функции, а потому в других точках эта величина Δf может быть и больше и меньше вычисленной величины, тем не менее, поскольку я знаю примерное поведение данной функции я могу быть уверен, что от вычисленного значения она не может отличаться очень уж сильно). Примерно так и рассуждает математик - специалист в области вычислительной математики - если надо увеличить точность в несколько раз, надо либо уменьшить шаг сетки, либо применить другой метод для той же самой операции (но в этом случае возрастет число операций, которые придется совершать компьютеру при том же самом шаге сетки). Например, в данном случае другой метод увеличивает точность в 3-4 раза при том же самом шаге матрицы.

Можно попытаться проиллюстрировать применение естественно-научного стиля мышления (как его понимает автор) на примере одной экономической задачи, с которой столкнулся автор. На рисунке показана схема производственных отношений фабрики $Ф_1$, фабрики $Ф_2$ и завода З.



Фабрика $Ф_1$ получает масло по цене 10 р/л (рублей за литр) на заводе З и продает его по цене x р/л (рублей за литр) на фабрику $Ф_2$. Взамен она обязана приобретать на фабрике $Ф_2$ песок по цене 600 р/т (рублей за тонну) из расчета на 1 литр масла - 1 килограмм песка. К счастью, она может перепродать ненужный ей песок обратно на завод, с которого берет масло, по цене 540 р/т. При какой отпускной цене x масла суммарная прибыль фабрики будет 20 % ?

<u>Решение.</u>

Если бы не было второго, убыточного цикла с песком, решение можно было бы искать простой пропорцией: если бы отпускная цена была 10 рублей за литр, то общая прибыль была бы равна 0%, т.е. возврат денег равнялся бы ровно 100 % (Возврат денег меньше 100 % обозначает убыток, больше 100 % - прибыль).

10 р/л - 100 %
x р/л - 120 % (прибыль 20 %)

Отсюда x=120/100 = 12 р/л.

Если рассмотреть убыток по второй линии (связанной с песком), то можно снова воспользоваться пропорцией:

600 р/т - 100 %
540 р/т - x %

x=90 %, убыток 10 %.

<u>Неправильный путь рассуждения</u>: убыток по одной линии 10 %, чтобы получить полную прибыль 20 %, надо по маслу иметь прибыль 30% (30% - 10 % = 20 %), т.е. цена:

10 р/л - 100 %
x р/л - 130 %

Отсюда x=13 р/л - <u>неверно</u>.

На самом деле не учтено то, что фабрика $Ф_1$ обязана на 1000 литров масла купить 1 тонну песка себе в убыток.

<u>Правильный путь рассуждения</u>: при продаже 1000 литров масла истратили 10×1000 рублей, получили $x\times1000$ рублей. При покупке тонны песка истратили 600 рублей, получили 540 рублей. Общие затраты: 600+10000, получили $540+1000\times x$. Имеем: превышение всех доходов над расходами 20%, т.е.

$$(540+1000\times x)/10600=1.2$$

Отсюда 1000x=12720-540=12180, т.е. x=12,18 рубля.

В чем смысл ошибки с точки зрения математика. В правильном ходе рассуждений есть отношение:

$$(540+1000x)/(600+10000)=1.2$$

В неправильном ходе рассуждения эта пропорция распадается на две:

$(540+1000x)/(600+10000)=540/600 + 1000x/10000=0.9+1.3$, что в общем случае неверно, ибо:

$(a+b)/(c+d)\neq a/c + b/d$

Здесь очень интересно, что неправильный ход мышления можно проверить предельным переходом. Если изменить цену на песок, ксажем на 2 копейки за тонну вместо 600 рублей за тонну и 1 копейку за тонну вместо 540 рублей за тонну при перепродаже, то убыток в процентах будет 50% и надо иметь прибыль 70 % по первому товару, чтобы ее компенсировать. Но реальный убыток всего 1 копейка и ею вообще можно пренебречьна фоне тысяч за первый товар, т.е. ход рассуждений, требующий 70% прибыли по первому товару, чтобы компенсировать такой крошечный убыток, заведомо ошибочен.

С помощью таких проверок, предельным переходом, математик и может проверить грубую ошибку в ходе своих мыслей - правильное решение должно работать при всех значениях цен.